.... 210

Lineare Algebra I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2017

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen. Bitte heften Sie sie in diesem Fall bei der Abgabe der Klausur mit dem bereitgestellten Tacker wieder in der richtigen Reihenfolge zusammen.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Um Ihr Ergebnis zu erfahren, benötigen Sie Ihre ID-Nummer. Sie kennen diese Nummer bereits aus dem Übungsbetrieb. Ihre Nummer lautet: ZZ9

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
-2x_1 - 4x_2 - 23x_3 - 9x_4 &= -6\\
4x_1 + 8x_2 + 28x_3 + 15x_4 &= 6\\
5x_1 + 10x_2 + 32x_3 + 6x_4 &= 5\\
-x_1 - 2x_2 - 16x_3 - 6x_4 &= -6
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Sei f der bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix definierte Endomorphismus des $\mathbb{F}_7$-Vektorraums $(\mathbb{F}_7)^3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f \in \mathbb{F}_7[X]$.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von f in $\mathbb{F}_7$.

(c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenräume von f.

(d) Ist f diagonalisierbar?

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3

Seien U und V die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

$$U := \mathbb{R}^3 \qquad\qquad V := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4y + 2z \}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel B und B' geordnete Basen sind von U, und dass die folgenden Tupel C und C' geordnete Basen sind von V:

$$B := (\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \qquad C := (\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$B' := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad C' := (\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(b) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen B und C gegeben ist durch die Matrix

$$_C M_B(f) = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $_{C'}M_{B'}(f)$, also die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B' und C'.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind. Pro Aufgabenteil können mehrere Aussagen richtig sein.

Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.

---

(1) Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ und Teilmengen $A, B \subset N$ gilt stets:

- ☐ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- ☐ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- ☐ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(2) Eine Abbildung von Mengen $f\colon A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn

- ☐ jede Faser von f aus genau einem Element besteht.
- ☐ jede Faser von f aus höchstens einem Element besteht.
- ☐ alle Fasern von f gleich mächtig sind.

(3) Welche der folgenden „Abbildungen“ ist *nicht* wohldefiniert?

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} \setminus \{1\} &\to \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} &\mapsto p \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ [x] &\mapsto [x-2] \end{aligned}$

(4) Ein *in*homogenes Gleichungssystem hat

- ☐ immer mindestens eine Lösung.
- ☐ unter Umständen gar keine Lösung.
- ☐ genau dann eine Lösung, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

(5) Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn

- ☐ sie vollen Zeilenrang besitzt.
- ☐ sie vollen Spaltenrang besitzt.
- ☐ Zeilen- und Spaltenrang übereinstimmen.

(6) Die Vereinigung zweier Basen eines Vektorraums ist

- ☐ wieder eine Basis.
- ☐ im Allgemeinen keine Basis, aber ein Erzeugendensystem.
- ☐ im Allgemeinen keine Basis, aber immer noch eine linear unabhängige Teilmenge.

(7) Eine Rotation um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn wird bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch folgende Matrix beschrieben:

☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} \pi/2 & 0 \\ 0 & \pi/2 \end{pmatrix}$

(8) Die komplexe Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 3 \end{pmatrix}$ besitzt

- ☐ 2 als einzigen Eigenwert.
- ☐ keine reellen Eigenwerte.
- ☐ gar keine Eigenwerte.

Aufgabe 5

Die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ist bezüglich der folgendermaßen definierten „punktweisen“ Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (s\cdot f)(x) &:= sf(x)\end{aligned}\right\}\text{ für } f,g\in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), x\in\mathbb{R}$$

Seien für $n \in \mathbb{Z}$ die folgenden Abbildungen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < n \\ 1 & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

(a) Ist die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(b) Ist die Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Belegen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort jeweils durch einen Beweis!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6

Zwei reelle Bilinearformen β und β' auf $\mathbb{R}^n$ sind **kongruent**, geschrieben $\beta \simeq \beta'$, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gibt, sodass gilt:

$$\beta'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(S\mathbf{v}, S\mathbf{w})$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Sei $\mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller reellen Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie: ist $\beta \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \simeq \beta'$, so ist auch $\beta' \in \mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ auf $\mathrm{Skal}(\mathbb{R}^n)$ eine Äquivalenzrelation definiert.

(c) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

13